

2018 年度入學 第 2 期  
日本大學聯合學力測試  
上級數學

2017 年 5 月實施

(90 分鐘)

在考試開始前請勿打開本考卷，仔細閱讀下述注意事項。  
請填寫考試編號與姓名。

注意事項

1. 考卷共 3 頁。
2. 答題紙為單面 1 張。
3. 若發現本考卷存在印刷不清晰、缺頁、錯頁或答題紙汗損時，請舉手告知監考老師。
4. 考卷上共有 3 大項必答題目。
5. 答題紙上請同樣填寫准考證號與姓名。
6. 答題時請務必使用黑色鉛筆，將答案填寫在答題紙指定欄中。
7. 考卷上可書寫筆記或計算草稿等。
8. 考試結束時，請再次確認准考證號、姓名，並按照監考老師指示提交答題紙與考卷。

准考證號	姓名



1 等差数列  $\{a_n\}$  滿足以下 (A)、(B) 兩個條件：

(A)  $a_6 = 12$

(B)  $a_{15} = 5a_3$

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的首項和公差，並用含  $n$  的代數式寫出表示数列第  $n$  項  $a_n$  的值。
- (2) 求  $\{a_n\}$  從首項到第 10 項的和。
- (3) 已知：在群數列中，第 1 群中的  $2^{a_1}$  有 1 個，第 2 群中的  $2^{a_2}$  有 2 個，第 3 群中的  $2^{a_3}$  有 3 個……第  $m$  群 ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) 中的  $2^{a_m}$  有  $m$  個。如下所示：

第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群	...
$2^{a_1}$	$  2^{a_2}, 2^{a_2}$	$  2^{a_3}, 2^{a_3}, 2^{a_3}$	$  2^{a_4}, 2^{a_4}, 2^{a_4}, 2^{a_4}$	$  2^{a_5}, \dots$

假設第  $m$  群的末項為  $b_m$ ，則第 1 群的末項為  $b_1$ ，第 2 群的末項為  $b_2$ ，第 3 群的末項為  $b_3$ ……以此類推。

- (i) 用含  $m$  的代數式寫出表示数列第  $m$  項  $b_m$  的值。
- (ii) 用含  $m$  的代數式寫出  $b_1 + b_2 + b_3 \dots + b_m$  的值。
- (iii) 若從首項  $2^{a_1}$  開始計算，則  $b_m$  為第幾項。
- (iv) 求從  $2^{a_1}$  到  $b_m$  的和。

2 平面  $xy$  上有兩個圓：

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0,$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 8ax - 6ay + 21a^2 = 0 \quad (a \text{ 為正常數})$$

$C_1$  的中心為  $A$ ， $C_2$  的中心為  $B$ 。

- (1) 用  $a$  來表示線段  $AB$  的長度。
- (2) 求當  $C_1$ 、 $C_2$  外切時的是否是“ $a$  可取到的所有值”。
- (3) 設  $a$  的值為 (2) 中求得的最大值：
  - (i) 求： $C_1$  和  $C_2$  的切點座標。
  - (ii) 求：與  $C_1$  和  $C_2$  同時相切的直線方程。
  - (iii) 求：(ii) 中求得的直線圍成的圖形面積。

3 已知：平面  $xy$  的原點為  $O$ ，平面  $xy$  上有橢圓  $C_1$  和雙曲線  $C_2$ ，運算式如下：

$$\text{橢圓 } C_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

$$\text{雙曲線 } C_2: \frac{x^2}{4} - y^2 = k \quad (k \text{ 為正常數})$$

- (1) 求  $C_1$  的長軸長度、短軸長度，以及焦點的座標；
- (2) 設  $C_2$  的漸近線和  $C_1$  的交點中，位於第 1 象限的點為  $A$ ，求  $A$  點的座標；  
並求通過  $A$  點的  $C_1$  的切線  $l$  的方程；
- (3) 假設  $C_2$  通過(2)中求得的  $l$  與  $x$  軸的交點，
  - (i) 求  $k$  的值。
  - (ii) 設  $C_2$  上的一點為  $P$ ， $OP = p$ 。 $C_2$  的焦點為  $F$ 、 $F'$ ，用  $p$  來表示 2 條線段長度的乘積  $PF \cdot PF'$ 。